Dez. 1976
Vogelsanger

Annex III

Kugelförmiger Faraday-Käfig im Feld einer ebenen Welle

Wir nehmen an, der Käfig habe eine vollständig geschlossene, kugelförmige Metalloberfläche, und wollen ermitteln, welche Ströme in dieser Metalloberfläche durch eine ebene Welle induziert werden. Für diese Betrachtung dürfen wir den ohm'schen Widerstand des Metalles vernachlässigen. An der Metalloberfläche müssen dann die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes und die Normalkomponente des magnetischen Feldes verschwinden.

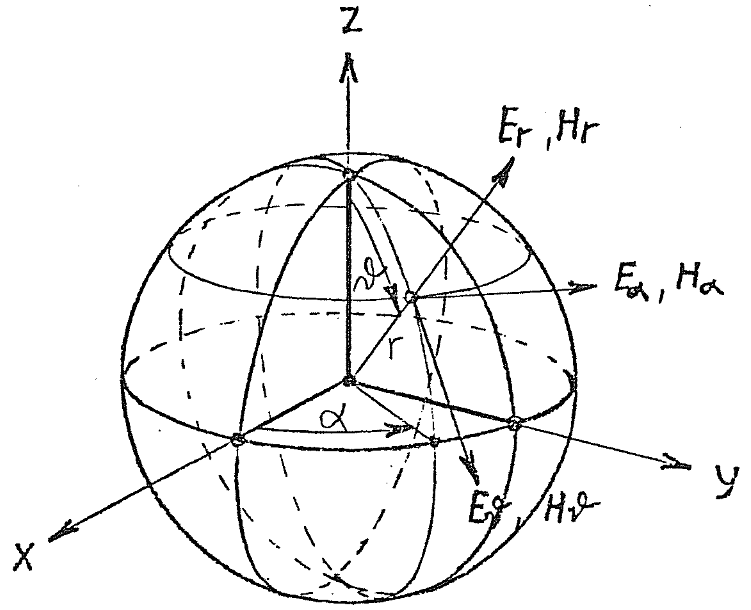
$$E_T = 0 , \qquad H_N = 0$$

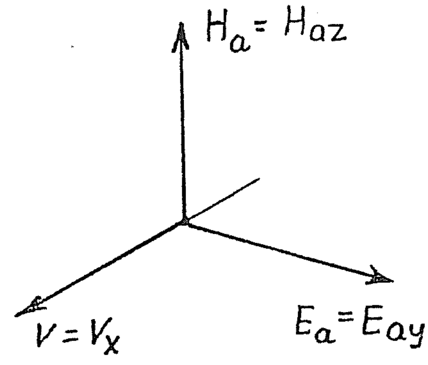
Die Ströme in der Metalloberfläche müssen also so verteilt sein, dass ihr Feld die entsprechenden Komponenten des äusseren Wellenfeldes auf Null kompensiert.

Begnügen wir uns mit einer Näherungslösung für ein Feld mit begrenzter Aenderungsgeschwindigkeit, so dass die Wellenlaufzeit im Bereich der Kugeldimension vernachlässigt werden kann (d.h. Frontzeit der äusseren Welle $T_F \ll \frac{R}{C}$), so lassen sich die obigen Bedingungen für das Feld an der Kugeloberfläche durch die Ueberlagerung von zwei Dipolfeldern erfüllen. Für die Erfüllung der Bedingung $E_T = 0$ braucht es einen elektrischen Dipol in der E-Richtung des äusseren Feldes und für die Erfüllung der Bedingung $H_N = 0$ einen magnetischen Dipol in der H-Richtung des äusseren Feldes. Wir wollen die beiden getrennt untersuchen.

Magnetischer Dipol in H-Richtung des äusseren Feldes

Wir legen die Feldvektoren und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der äusseren Welle in die unten angegebenen Richtungen und wählen dazu Kugelkoordinaten mit der Polaxe in der Richtung von H, d.h. also in z-Richtung.





Das äussere Feld H_a ergibt dann auf der Kugeloberfläche die Normalkomponente

$$H_{ar} = H_a \cdot \cos \vartheta$$

Ein magnetischer Dipol mit dem in z-Richtung liegenden Dipolmoment M im Zentrum der Kugel gibt die folgenden Feldkomponenten:

$$E_\alpha(M) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \sin\vartheta \cdot \left(\frac{\dot{M}}{r^2} + \frac{\ddot{M}}{cr}\right)$$

$$H_r(M) = \frac{2}{4\pi\mu_0} \cdot \cos\vartheta \cdot \left(\frac{M}{r^3} + \frac{\dot{M}}{cr^2}\right)$$

$$H_\vartheta(M) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \sin\vartheta \left(\frac{M}{r^3} + \frac{\dot{M}}{cr^2} + \frac{\ddot{M}}{c^2 r}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{M} = \frac{\partial M}{\partial t} \\ \ddot{M} = \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} \\ c = \text{Lichtgeschw.} \end{array} \right.$$

Für die Käfigoberfläche ist $r = R$ zu setzen, und bei der oben vorausgesetzten Beschränkung auf Vorgänge, bei denen die Wellenlaufzeit im Bereich der Kugeldimension vernachlässigt werden darf ($T_F \ll \frac{R}{c}$), kann in der Formel für $H_\vartheta(M)$ das dritte Glied in der Klammer gegenüber den anderen beiden vernachlässigt werden. Es gilt dann für $r = R$:

$$E_\alpha(M) = -\frac{1}{4\pi R^2}\cdot\sin\vartheta\cdot\left(\dot{M} + R/c\,\ddot{M}\right)$$

$$H_r(M) = \frac{2}{4\pi\mu_0 R^3}\cdot\cos\vartheta\cdot\left(M + R/c\,\dot{M}\right)$$

$$H_\vartheta(M) = \frac{1}{4\pi\mu_0 R^3}\cdot\sin\vartheta\cdot\left(M + R/c\,\dot{M}\right)$$

Für das H-Feld in r-Richtung gilt auf der Kugeloberfläche die Bedingung

$$H_r = H_{ar} + H_r(M) = 0$$

und damit ist

$$\frac{2}{4\pi\mu_0 R^3}\left(M + R/c\,\dot{M}\right) = -H_a$$

$$H_\vartheta(M) = -1/2\,\sin\vartheta\cdot H_a$$

Das gesamte Magnetfeld ist

$$H_{a\vartheta} + H_\vartheta(M) = -3/2\,\sin\vartheta\cdot H_a$$

Da im abgeschirmten Innenraum das Feld Null ist, ist dies zugleich der Feldsprung zwischen innen und aussen. Er bestimmt den Strombelag in der Kugelfläche, welcher senkrecht zur Richtung von H, also in α-Richtung liegen muss.
Es ist

$$\underline{J_\alpha = -3/2\,\sin\vartheta\cdot H_a}$$

Es sind dies Kreisströme um die Kugelaxe in H-Richtung.

Aendert sich das Feld H_a, so wird in einem horizontalen Kreis der Kugeloberfläche mit dem Radius $R\cdot\sin\vartheta$ eine Spannung induziert von der Grösse

$$\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0\cdot\pi\cdot R^2\cdot\sin^2\vartheta\cdot\dot{H_a}$$

Dem entspricht eine mittlere Feldstärke am Kreisumfang von

$$E_\alpha = -\frac{1}{2}\mu_o R \sin\vartheta \cdot \dot{H}_a$$

Diese wird kompensiert durch das elektrische Feld des Dipols. Dieses ist gemäss Seite 3

$$E_\alpha(M) = -\frac{1}{4\pi R^2} \cdot \sin\vartheta \cdot (\dot{M} + R/c\,\ddot{M})$$

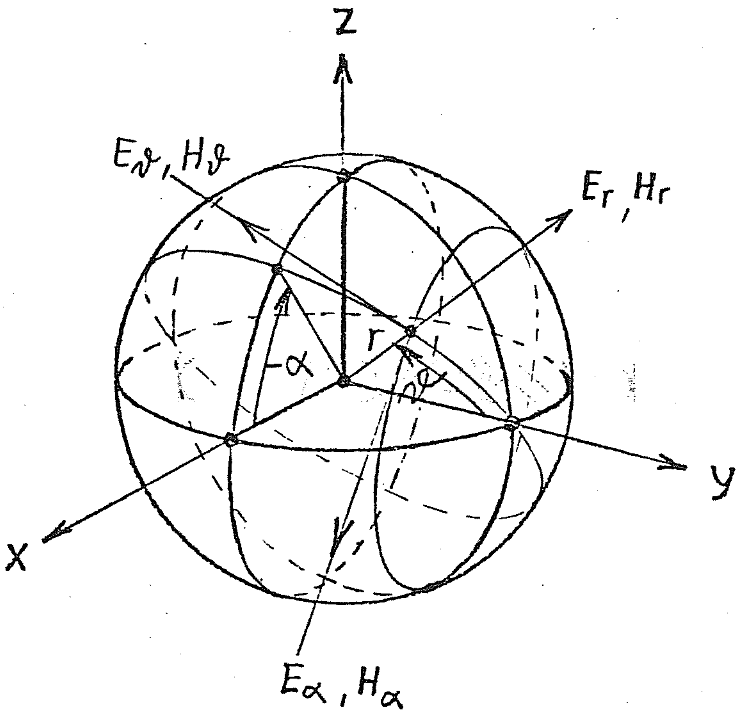
und mit $\frac{2}{4\pi\mu_o R^3} \cdot (M + R/c\,\dot{M}) = -H_a$

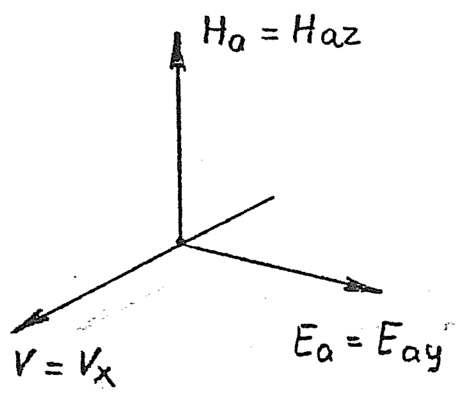
$$E_\alpha(M) = 1/2\,\mu_o R \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{H}_a$$

Elektrischer Dipol in E-Richtung des äusseren Feldes (E_a)

Wir legen die Feldvektoren und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der äusseren Welle in die unten angegebenen Richtungen und wählen dazu Kugelkoordinaten mit der Polaxe in der Richtung von E, d.h. in y-Richtung.

Zulaufende Welle





Das äussere E-Feld E_a liefert dann an der Kugeloberfläche eine Tangentialkomponente in ϑ-Richtung

$$E_{a\vartheta} = - E_a \cdot \sin\vartheta$$

Ein elektrischer Dipol mit dem in y-Richtung liegenden Dipolmoment P im Zentrum der Kugel gibt die folgenden Feldkomponenten:

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sin\vartheta \cdot \left(\frac{P^\cdot}{r^2} + \frac{P^{\cdot\cdot}}{cr}\right)$$

$$E_r(P) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \cos\vartheta \cdot \left(\frac{P}{r^3} + \frac{P^\cdot}{cr^2}\right)$$

$$E_\vartheta(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sin\vartheta \cdot \left(\frac{P}{r^3} + \frac{P^\cdot}{cr^2} + \frac{P^{\cdot\cdot}}{c^2 r}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\cdot = \frac{\partial P}{\partial t} \\ P^{\cdot\cdot} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \\ c = \text{Lichtgeschw'keit} \end{array} \right.$$

Für die Kugeloberfläche ist wieder r = R zu setzen und wegen der oben gemachten Voraussetzung $T_F \ll R/c$ kann in der Formel für E_ϑ das 3. Glied der Klammer gegenüber den anderen beiden vernachlässigt werden. Es gilt dann für r = R:

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \sin\vartheta \cdot (P^\cdot + R/c\, P^{\cdot\cdot})$$

$$E_r(P) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \cos\vartheta \cdot (P + R/c\, P^\cdot)$$

$$E_\vartheta(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \sin\vartheta \cdot (P + R/c\, P^\cdot)$$

Für das E-Feld in ϑ-Richtung gilt auf der Kugelfläche die Bedingung

$$E_\vartheta = E_{a\vartheta} + E_\vartheta(P) = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{4\pi R^2}(P + R/c\, P^\cdot) = R \cdot \varepsilon_0 \cdot E_a$$

$$\frac{1}{4\pi R^2}(P^\cdot + R/c\, P^{\cdot\cdot}) = R \cdot \varepsilon_0 \cdot E_a^\cdot$$

Es ist somit

$$H_{\alpha}(P) = R \cdot \varepsilon_0 \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{E}_a$$

Die Ströme in der Kugelfläche, die aussen das Dipolfeld ergeben, kompensieren im Innern das Feld der äusseren Welle auf Null. Diese Ströme (und Ladungen) allein ergäben daher im Kugelinnern das Feld $-E_a$. Wegen der Verschiebungsströme ist damit auch ein magnetisches Feld $H_{i\alpha}(P)$ verbunden. Es ist an der Kugelinnenfläche

$$H_{i\alpha}(P) = -1/2\, R \cdot \varepsilon_0 \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{E}_a$$

Der Strombelag auf der Kugelfläche muss den Feldsprung zwischen innen und aussen erzeugen. Er liegt senkrecht zur H-Richtung und somit in Richtung ϑ. Es ist

$$\underline{J_{\vartheta} = -3/2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \cdot R/c \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{E}_a}$$

oder mit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$\underline{J_{\vartheta} = -3/2\, \varepsilon_0 \cdot R \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{E}_a}$$

Es sind dies Ströme, welche Ladungen von einem Polbereich der Kugel zum gegenüberliegenden Polbereich verschieben.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass der durch die ebene Welle in der Kugelfläche erzeugte Strombelag in erster Näherung aus zwei sich überlagernden Stromsystemen zusammengesetzt ist:

1) Kreisströme um die Kugelaxe in H-Richtung von der Grösse

$$J_{\alpha} = -3/2 \sin\vartheta \cdot H_a$$

(wobei die Polaxe der Kugelkoordinaten in H-Richtung liegt)

2) Pol-zu-Pol-Ströme zwischen den Polen der in E-Richtung liegenden Kugelaxe von der Grösse

$$J_{\vartheta} = -3/2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \cdot R/c \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{E}_a$$

Zürich, Dezember 1976
EV/ASchm

FORSCHUNGSKOMMISSION DES SEV UND VSE
FUER HOCHSPANNUNGSFRAGEN

E. Vogelsanger